Análise Matemática IV
Problemas para as Aulas Práticas

12 de Dezembro de 2006

Semana 12

1. Calcule a série de Fourier da função $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ +1 & \text{se} \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

Resolução:

A série de Fourier associada a f será

$$SF[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(n\pi x) + b_n \operatorname{sen}(n\pi x) \Big)$$

em que

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0 \quad \text{e} \quad a_n = \int_{-1}^{1} \cos(n\pi x) f(x)\, dx = 0$$

dado que f é uma função impar; e

$$b_n = \int_{-1}^{1} \operatorname{sen}(n\pi x) f(x)\, dx = 2\int_{0}^{1} \operatorname{sen}(n\pi x)\, dx = -\frac{2}{n\pi} \cos(n\pi x)\Big|_0^1 = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos(n\pi))$$

Assim

$$SF[f](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(1 - \cos(n\pi)) \operatorname{sen}(n\pi x)$$

Visto

$$1 - \cos(n\pi) = 1 - (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ 2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

podemos escrever

$$SF[f](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \operatorname{sen}((2n-1)\pi x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in]-1,0[\cup]0,1[\\ 0 & \text{se } x = -1,\ x = 0,\ x = 1 \end{cases}$$

2. Determine a série de Fourier da função $g(x) = L - |x|$, no intervalo $[-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Resolução:

A função $f(x)$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \begin{cases} L + x & \text{se } x \in [-L, 0[\\ L - x & \text{se } x \in [0, L] \end{cases}$$

A série de Fourier associada a f será

$$SF[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right)$$

em que

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) dx = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} (L - x)\, dx = L$$

e para $n > 1$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos(n\pi x)\, dx = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos(n\pi x)\, dx = \frac{2L}{n^2\pi^2}(1 - \cos(n\pi))$$

Dado que f é uma função par podemos concluir que

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}(n\pi x) f(x)\, dx = 0$$

Assim

$$SF[f](x) = \frac{L}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L}{n^2\pi^2}(1 - \cos(n\pi)) \cos\frac{n\pi}{L} x$$

Visto

$$1 - \cos(n\pi) = 1 - (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ 2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

podemos escrever

$$SF[f](x) = \frac{L^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L}{(2n-1)^2\pi^2} \cos\frac{(2n-1)\pi}{L} x = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in]-L, L[\\ \frac{L}{2} & \text{se } x = -L,\ x = L \end{cases}$$

Para calcular o valor da série numérica, usaremos o facto de para $x = 0$ se ter $SF[f](0) = f(0)$, isto é

$$\frac{L}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L}{(2n-1)^2\pi^2} = L$$

pelo que

$$\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

3. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^2$, no intervalo $x \in [-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Resolução:

A série de Fourier associada a h será

$$SF[h](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos\big(\frac{n\pi}{L}x\big) + b_n \operatorname{sen}\big(\frac{n\pi}{L}x\big) \Big)$$

em que

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} h(x)dx = \frac{2}{L}\int_0^L x^2\, dx = \frac{2L^2}{3}$$

e para $n > 1$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} h(x)\cos(n\pi x)\, dx = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \cos(n\pi x)\, dx = \frac{4L^2}{n^2\pi^2}\cos(n\pi)$$

Dado que f é uma função par podemos concluir que

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}(n\pi x) h(x)\, dx = 0$$

Assim

$$SF[h](x) = \frac{L^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L^2}{n^2\pi^2}\cos(n\pi)\cos\frac{n\pi}{L}x = \begin{cases} h(x) & \text{se } x \in]-L, L[\\ L^2 & \text{se } x = -L,\ x = L \end{cases}$$

Para calcular o valor da série numérica, usaremos o facto de para $x = L$ se ter $SF[h](L) = L^2$, isto é

$$\frac{L^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L^2}{n^2\pi^2}\cos(n\pi)\cos(n\pi) = L^2$$

pelo que

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{2}{3} \ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

4. Considere as funções definidas por $f(x) = 1$ e $g(x) = x$. Determine:

   (a) as séries de Fourier associadas a f e g no intervalo $[-1, 1]$;

   (b) as séries de senos associadas a f e g no intervalo $[0, 1]$;

   (c) as séries de cosenos associadas a f e g no intervalo $[0, 1]$.

Resolução:

(a) A série de Fourier associada a f no intervalo $[-1, 1]$ é:

$$SF[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(n\pi x) + b_n \operatorname{sen}(n\pi x) \Big).$$

Como f é uma função par, podemos concluir que:

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\int_0^1 1\,dx = 2$$

e para $n > 1$

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 1\cos(n\pi x)\,dx = \frac{2}{n\pi}(\mathrm{sen}\,(n\pi) - \mathrm{sen}\,(0)) = 0,$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{sen}\,(n\pi x)\,dx = 0.$$

Assim,

$$SF[f](x) = 1 = f(x).$$

A série de Fourier associada a g no intervalo $[-1,1]$ é:

$$SF[g](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(n\pi x) + b_n\mathrm{sen}\,(n\pi x)\Big).$$

Como g é uma função ímpar, podemos concluir que:

$$a_0 = \int_{-1}^{1} g(x)dx = 0,$$

e para $n > 1$

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_{-1}^{1} g(x)\cos(n\pi x)\,dx = 0,\\
b_n &= \int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{sen}\,(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 x\,\mathrm{sen}\,(n\pi x)\,dx\\
&= 2\Big(-\frac{x}{n\pi}\cos(\pi n x)\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos(\pi n x)\,dx\Big)\\
&= -\frac{2}{n\pi}\cos(\pi n) = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$SF[g](x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\mathrm{sen}\,(n\pi x).$$

(b) Para obter a série de senos de um função no intervalo $[0,1]$ temos de prolongá-la como funções ímpar ao intervalo $[-1,1]$. A série de Fourier da função prolongada é a série de senos procurada.

A série de senos de f em $[0,1]$ é consequência da extensão ímpar ao intervalo $[-1,1]$, isto é, da série de Fourier da função

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \\ -1 & \text{se } x \in [-1,0] \end{cases}$$

pelo que a série procurada é (ver probema 1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)\text{sen}\,(n\pi x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in]0,1[\\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

A série de senos de g em $[0,1]$ é consequência da extensão ímpar ao intervalo $[-1,1]$. Como g é ímpar, o prolongamento coincide com g e a série de senos é a série de Fourier que calculámos na alínea (a):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\text{sen}\,(n\pi x).$$

(c) Para obter a série de cosenos de um função no intervalo $[0,1]$ temos de prolongá-la como funções par ao intervalo $[-1,1]$. A série de Fourier da função prolongada é a série de cosenos procurada.

Como f é uma função par, a série de cosenos no intervalo $[0,1]$ é a série de Fourier que calculámos na alínea (a), i.e., a série com um único termo constante 1.

A série de cosenos de g em $[0,1]$ é consequência da extensão par ao intervalo $[-1,1]$, isto é, da série de Fourier da função

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ \\ -x & \text{se } x \in [-1,0] \end{cases}$$

Temos, pois, que a série procurada é:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\,(n\pi x),$$

onde

$$a_0 = \int_{-1}^{1} \tilde{g}(x)\,dx = 2\int_0^1 g(x)\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = 1,$$

e para $n > 0$:

$$a_n = \int_{-1}^{1} \tilde{g}(x)\cos\,(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 g(x)\cos\,(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 x\cos\,(n\pi x)\,dx = \frac{2}{\pi^2 n^2}((-1)^n - 1).$$

5. Considere a equação de propagação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (*)$$

   (a) Mostre que as suas soluções estacionárias (isto é, que não dependem do tempo) são da forma $u(x) = Ax + B$.

   (b) Determine a solução estacionária para o problema correspondente a uma barra situada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$, em que se fixam as temperaturas $u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2$.

   (c) Resolva a equação $(*)$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$ e para as condições iniciais e de fronteira

$$u(0,t) = 20, \qquad u(1,t) = 60, \qquad u(x,0) = 75.$$

Resolução: (a) Uma solução é estacionária se e só se $u_t = 0$, pelo que as soluções estacionárias de $(*)$ são as funções $u = u(x)$ que satisfazem $u_{xx} = 0$. É claro, então, que u tem de ser um polinómio de grau 1 em x: $u(x) = Ax + B$, onde A e B são constantes.

(b) Com $u(x) = Ax + B$, temos $u(0) = B = T_1$ e $u(L) = AL + B = T_2$. Portanto

$$B = T_1 \quad \text{e} \quad A = \frac{T_2 - B}{L} = \frac{T_2 - T_1}{L}.$$

A solução estacionária pretendida é $u(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$.

(c) Identificamos, em relação às alíneas anteriores, $L = 1$, $T_1 = 20$ e $T_2 = 60$. Designando por $w(x,t)$ a diferença entre a solução estacionária $u(x) = 40x + 20$ e a solução do problema $u(x,t)$, ou seja

$$w(x,t) = u(x,t) - 40x - 20,$$

vemos que $w(x,t)$ é solução do problema:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{com} \quad w(0,t) = w(1,t) = 0 \quad \text{e} \quad w(x,0) = 55 - 40x.$$

Usando o método da separação de variáveis obtemos

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x).$$

Donde

$$55 - 40x = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x).$$

Determinamos os coeficientes desta série de senos da forma habitual, recorrendo a integração por partes:

$$\begin{aligned}
b_n &= 2\int_0^1 (55 - 40x) \operatorname{sen}(n\pi x)\, dx \\
&= 2\left[(55 - 40x)\frac{\cos(n\pi x)}{-n\pi}\right]_0^1 - 2\int_0^1 (-40)\frac{\cos(n\pi x)}{-n\pi} dx \\
&= 2\left((55 - 40)\frac{\cos(n\pi)}{-n\pi} - \frac{55}{-n\pi}\right) \\
&= 2\left(\frac{15}{n\pi}(-1)^{n+1} + \frac{55}{n\pi}\right) \\
&= \frac{10}{n\pi}\left(3(-1)^{n+1} + 11\right).
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= 20 + 40x + w(x,t) \\
&= 20 + 40x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10}{n\pi}\left(3(-1)^{n+1} + 11\right) \exp(-n^2\pi^2\alpha^2 t) \operatorname{sen}(n\pi x)
\end{aligned}$$

Note-se que esta solução é C^∞ para $t > 0$, e contínua para $0 < x < 1$ e $t = 0$, mas descontínua nos pontos $(x,t) = (0,0)$ e $(x,t) = (1,0)$ porque a condição inicial não é compatível com as condições fronteira.

6. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t \geq 0,\ x \in [0,1]) \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \\ u(0,x) = 0\ ,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 1, \end{cases}$$

onde c é um parâmetro real.

Resolução: Recorrendo ao método da separação de variáveis, utilizando as condições fronteira $u(t,0) = u(t,1) = 0$, obtemos soluções da forma:

$$(A_n \cos(n\pi ct) + B_n \mathrm{sen}\,(n\pi ct))\,\mathrm{sen}\,(n\pi x),$$

onde $n = 0,1,2,\ldots$ Assim, procuramos uma solução da forma:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos(n\pi ct) + B_n \mathrm{sen}\,(n\pi ct))\,\mathrm{sen}\,(n\pi x).$$

Impondo a condição inicial:

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \mathrm{sen}\,(n\pi x) = 0,$$

concluímos que $A_n = 0$, para todo o n. Por outro lado, derivando $u(t,x)$ em ordem a t, obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\pi c B_n \cos(n\pi ct)\,\mathrm{sen}\,(n\pi x),$$

pelo que a segunda condição inicial fornece:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\pi c B_n \mathrm{sen}\,(n\pi x) = 1.$$

Precisamos, pois, de expandir a função constante 1, numa série de senos no intervalo $[0,1]$. Isto fornece os coeficientes (ver problema 4):

$$n\pi c B_n = 2\int_0^1 \mathrm{sen}\,(n\pi x)\,dx = \frac{\cos(n\pi) - 1}{-n\pi},$$

ou seja

$$B_n = \frac{2\,(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2 c}.$$

Portanto a solução é

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\,(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2 c}\mathrm{sen}\,(n\pi ct)\,\mathrm{sen}\,(n\pi x).$$

7. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação de Laplace

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x, y \in [0,1]) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0, & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = \cos(2\pi x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, & \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) = \cos(2\pi y). \end{cases}$$

Resolução: Começamos por observar que basta resolver cada um dos problemas:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial y}(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial u_1}{\partial y}(x,1) = 0, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x}(0,y) = 0, \quad \dfrac{\partial u_1}{\partial x}(1,y) = \cos(\pi y), \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial y}(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial u_2}{\partial y}(x,1) = \cos(2\pi x), \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x}(0,y) = 0, \quad \dfrac{\partial u_2}{\partial x}(1,y) = 0. \end{cases}$$

pois a solução procurada é a soma das soluções de cada um destes problemas:

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y).$$

Recorrendo ao método da separação de variáveis, e utilizando as condições fronteira $\dfrac{\partial u_1}{\partial y}(x,0) = \dfrac{\partial u_1}{\partial y}(x,1) = \dfrac{\partial u_1}{\partial x}(0,y) = 0$, obtemos soluções para o primeiro sistema da forma:

$$\cosh(n\pi x)\cos(n\pi y), \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Assim, vemos que a solução do primeiro sistema é da forma

$$u_1(x,y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cosh(n\pi x)\cos(n\pi y),$$

e de forma semelhante para u_2, já que $u_2(x,y) = u_1(y,x)$.

Impondo as condições fronteira $\dfrac{\partial u_1}{\partial x}(1,y) = \cos(2\pi y)$ e $\dfrac{\partial u_2}{\partial y}(x,1) = \cos(2\pi x)$, obtemos,

$$u_1(x,y) = \frac{a_0}{2} + \frac{\cosh(2\pi x)\cos(2\pi y)}{2\pi \operatorname{senh}(2\pi)} \qquad \text{e} \qquad u_2(x,y) = \frac{a_0}{2} + \frac{\cosh(2\pi y)\cos(2\pi x)}{2\pi \operatorname{senh}(2\pi)}.$$

A solução pretendida é pois

$$u(x,y) = c + \frac{\cosh(2\pi x)\cos(2\pi y) + \cosh(2\pi y)\cos(2\pi x)}{2\pi \operatorname{senh}(2\pi)},$$

onde c é uma constante arbitrária.

8. Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u, \quad (x \in [0,\pi]) \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = \operatorname{sen} x. \end{cases}$$

Resolução:

Recorrendo ao método da separação de variáveis, e utilizando as condições fronteira $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ obtemos soluções da forma:

$$e^{(2-n^2)t}\cos(nx) \qquad (n = 0,1,2,\dots).$$

Tomando combinações lineares destas soluções chegamos a

$$u(x,t) = \frac{a_0 e^{2t}}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{(2-n^2)t}\cos(nx).$$

Para determinar os coeficientes a_n, impomos que $u(x,t)$ satisfaça a condição inicial, o que fornce:

$$u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) = \operatorname{sen} x.$$

Ou seja, os a_n são os coeficientes do desenvolvimento da função $\operatorname{sen} x$ numa série de cosenos no intervalo $[0,\pi]$. Da forma usual, obtemos:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos nx \, dx = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\frac{1+(-1)^n}{1-n^2} & \text{se} \quad n \neq 1 \\ 0 & \text{se} \quad n = 1 \end{cases}$$

Logo a solução procurada é:

$$u(x,t) = \frac{2e^{2t}}{\pi}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2e^{-4n^2 t}}{1-4n^2}\cos(2nx)\right).$$

9. Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - tu, \quad (x \in [0,2\pi]) \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = x \end{cases}$$

Resolução:

Recorrendo ao método da separação de variáveis, e utilizando as condições fronteira $u_x(0,t) = u_x(2\pi,t) = 0$, obtemos soluções da forma:

$$e^{-\frac{n^2 t}{4} - \frac{t^2}{2}}\cos\left(\frac{n}{2}x\right).$$

Formando combinações lineares, concluímos que a solução toma a forma:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2}e^{-\frac{t^2}{2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\frac{n^2 t}{4} - \frac{t^2}{2}}\cos\left(\frac{n}{2}x\right).$$

Impondo que esta solução verifique a condição inicial

$$u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n}{2}x\right) = x,$$

vemos que os a_n são os coeficientes da expansão da função $f(x) = x$ numa série de cosenos no intervalo $[0,2\pi]$. Ou seja, para $n = 0$:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x dx = \frac{(2\pi)^2}{4\pi} = \pi$$

e para $n \neq 0$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x \cos\left(\frac{n}{2}x\right) dx = \frac{4}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right).$$

Assim, a solução procurada é:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \pi e^{-\frac{t^2}{2}} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^2} e^{-\frac{n^2+2t}{4}t} \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \\ &= \pi e^{-\frac{t^2}{2}} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2} e^{-\frac{4n^2+2t}{4}t} \cos(nx). \end{aligned}$$

10. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(x,0,t) = x\ , \quad u(x,1,t) = x \\ u(0,y,t) = 0\ , \quad u(1,y,t) = 1 \\ u(x,y,0) = x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \cos(2\pi(x-y)) - \cos(2\pi(x+y)) \end{cases}$$

para $x,y \in [0,1]$ e $t \in \mathbb{R}$.

Solução:

Procurando uma solução v que não dependa de t e que satisfaça as condições fronteira, obtemos $v(x,y) = x$.

Pelo que se definirmos $\omega(t,x,y) = u(t,x,y) - x$, esta função ω satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \\ \omega(t,x,0) = 0\ , \quad \omega(t,x,1) = 0 \\ \omega(t,0,y) = 0\ , \quad \omega(t,1,y) = 0 \\ \omega(0,x,y) = 0. \end{cases}$$

Usando o método da separação de variáveis para resolver este último problema, chegamos à seguinte solução formal:

$$\omega(t,x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} c_{m,n} \operatorname{sen}\left(\sqrt{(m^2+n^2)}\pi t\right) \operatorname{sen}(m\pi x) \operatorname{sen}(n\pi y).$$

Atendendo que $\cos(2\pi(x-y)) - \cos(2\pi(x+y)) = 2\text{sen}\,(2\pi x)\,\text{sen}\,(2\pi y)$, vem

$$u(t,x,y) = x + \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \text{sen}\,(\sqrt{8}\pi t)\,\text{sen}\,(2\pi x)\,\text{sen}\,(2\pi y).$$